

# **Éléments de modélisation des structures - problèmes de résistance des matériaux**

**Dominique Bauer, ing., Ph.D.**

### Problème 1

Une charge de 10 kN est supportée par quatre tiges en acier reliées par des poutres rigides  $AB$  et  $DC$  tel que montré à la figure 1. Déterminez l'angle de rotation des poutres après l'application de la charge. Les poutres sont initialement à l'horizontale et l'aire de la section des tiges est de  $50 \text{ mm}^2$ .  $E_{\text{acier}} = 200 \text{ GPa}$ . Exprimer la réponse en degrés.

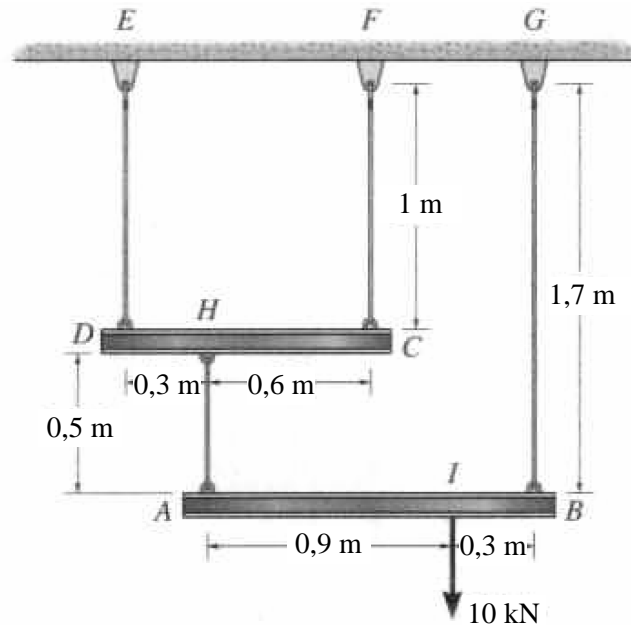


Figure 1. Tiges et poutres supportant une charge de 10 kN.

### Solution

La figure 2 montre le modèle de la structure réalisé à l'aide de SAFI, avec les conditions d'appui et les déformations de la structure sous la charge de 10 kN. On a placé un support latéral aux joints 1 et 4 pour empêcher que le modèle soit instable. Ce support consiste en un ressort avec une faible rigidité, disons 1 N/m. On vérifiera que le déplacement horizontal des joints 1 et 4 est nul. Étant donné qu'il n'y a pas de déplacement horizontal, on aurait pu également restreindre le mouvement selon X. Dans ce cas, on vérifiera que la réaction des ressorts est nulle. Pour les tiges, on a utilisé une barre de treillis dont la seule propriété à définir est une aire de  $50 \text{ mm}^2$ . Les poutres rigides sont modélisées à l'aide d'éléments poutres ayant un moment d'inertie très élevé, disons  $10^{10} \text{ mm}^4$ .

Les déplacements des joints sont donnés sous forme de tableau à la figure 3. La rotation des poutres est égale à celle de joints qui définissent les poutres. Ainsi, la rotation de la poutre  $DHC$ , définie par les joints 1, 2 et 3, est égale à  $0,0053^\circ$  et celle de la poutre  $AIB$ , définie par les joints 4 et 5, est égale à  $-0,0483^\circ$ . Le sens des rotations est conforme à la règle de la main droite appliquée autour des axes globaux  $XYZ$  du modèle. Une rotation positive autour de l'axe  $Z$  est donc dans le sens de  $X$  vers  $Y$ , c'est-à-dire dans le sens anti-horaire ; une rotation négative est dans le sens horaire.

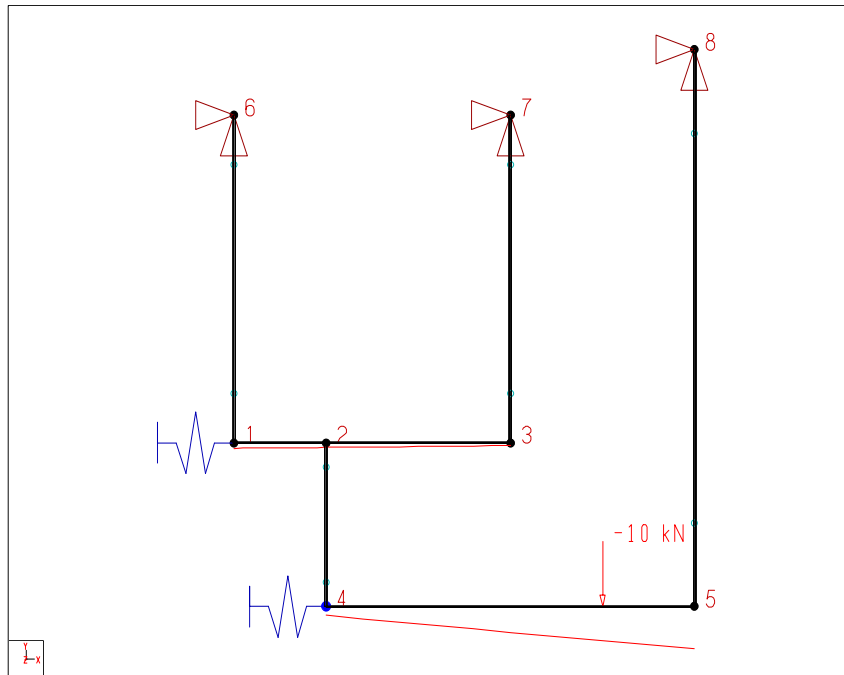


Figure 2. Modèle SAFI de la structure. Les conditions d'appui, la charge et les déformations de la structure sont montrées.

No Joint	No Combinaison	Dépl X mm	Dépl Y mm	Rot Z deg
1	1	100,0000	-0,1667	0,0053
2	1	101,5000	-0,1389	0,0053
3	1	104,5000	-0,0833	0,0053
4	1	0,0000	-0,2639	-0,0483
5	1	0,0000	-1,2750	-0,0483
6	1	0,0000	0,0000	0,0000
7	1	0,0000	0,0000	0,0000
8	1	0,0000	0,0000	0,0000

Figure 3. Déplacement des joints.

### Vérification

On trace un diagramme de corps libre des poutres, tel que montré à la figure 4 (a) et (b), et on considère l'équilibre des forces et des moments pour trouver l'effort dans les tiges.

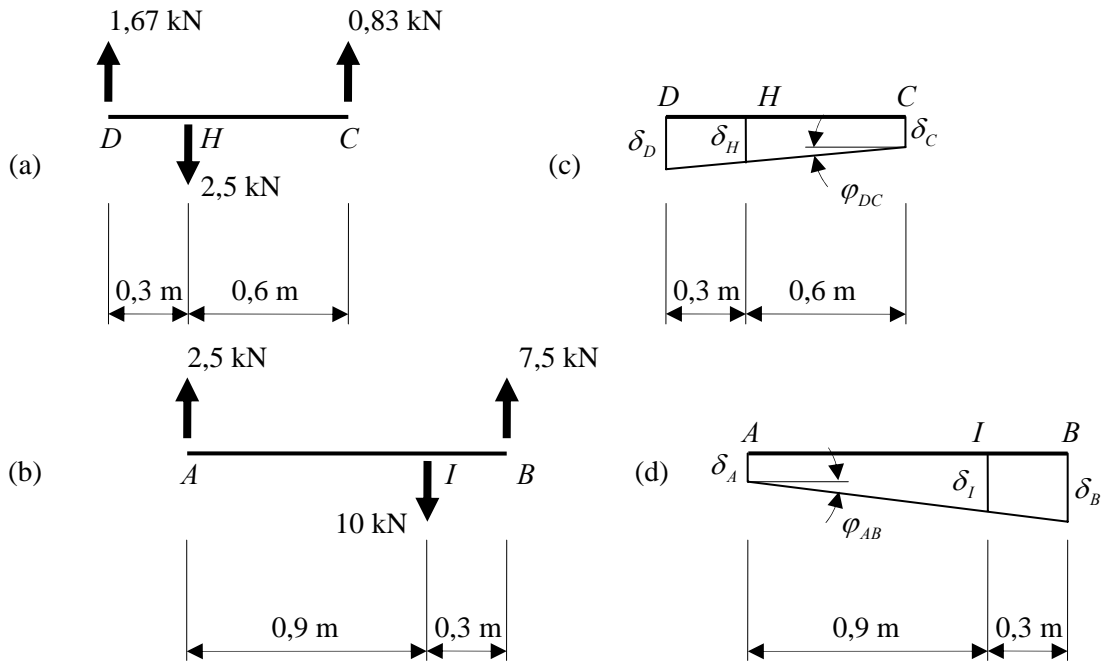


Figure 4. (a) et (b) DCL des poutres *AIB* et *DHC*, (c) et (d) déplacement des poutres *AIB* et *DHC*.

Pour la poutre *AIB*,

$$\sum M_A = 0:$$

$$-10 \text{ kN} \cdot 0,9 \text{ m} + F_{BG} \cdot 1,2 \text{ m} = 0$$

$$F_{BG} = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{verticale} = 0:$$

$$+F_{AH} - 10 \text{ kN} + 7,5 \text{ kN} = 0$$

$$F_{AH} = 2,5 \text{ kN}$$

On trouve de façon semblable pour la poutre *DHC*,  $F_{DE} = 1,67 \text{ kN}$  et  $F_{CF} = 0,83 \text{ kN}$ .

On considère ensuite le déplacement des poutres tel que montré à la figure 4 (c) et (d). Pour la poutre *DHC*, on a :

$$\delta_D = \frac{1,67 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm}}{50 \text{ mm}^2 \cdot 200 \text{ GPa}} = 0,167 \text{ mm}$$

$$\delta_C = \frac{0,83 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm}}{50 \text{ mm}^2 \cdot 200 \text{ GPa}} = 0,0833 \text{ mm}$$

$$\varphi_{DC} = \frac{\delta_D - \delta_C}{900 \text{ mm}} = \frac{0,0833 \text{ mm}}{900 \text{ mm}} = 92,6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 5,31 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ$$

On a également :

$$\delta_H = \delta_C + \frac{0,6 \text{ m}}{0,9 \text{ m}} (\delta_D - \delta_C) = 0,1389 \text{ mm}$$

4

Pour la poutre *DHC*, on a :

$$\delta_A = \frac{2,57 \text{ kN} \cdot 500 \text{ mm}}{50 \text{ mm}^2 \cdot 200 \text{ GPa}} + \delta_H = 0,125 \text{ mm} + 0,1389 \text{ mm} = 0,264 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \frac{7,5 \text{ kN} \cdot 1700 \text{ mm}}{50 \text{ mm}^2 \cdot 200 \text{ GPa}} = 1,275 \text{ mm}$$

$$\varphi_{AB} = \frac{\delta_B - \delta_A}{1200 \text{ mm}} = 843 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 48,3 \times 10^{-3} \text{ } \curvearrowright$$

### Problème 3

Un boulon en acier a un diamètre de 7 mm et est inséré à l'intérieur d'un manchon en aluminium tel que montré à la figure 5. Le manchon a un diamètre intérieur de 8 mm et un diamètre extérieur de 10 mm. L'écrou est ajusté de tel sorte qu'il est tout juste en contact avec le manchon. L'ensemble est initialement à la température  $T_1 = 20\text{ °C}$  et est ensuite porté à la température  $T_2 = 100\text{ °C}$ . Déterminer la contrainte axiale moyenne dans le boulon et dans le manchon. Exprimer la réponse en MPa.

$E_{\text{acier}} = 200\text{ GPa}$ ,  $E_{\text{aluminium}} = 70\text{ GPa}$ ,  $\alpha_{\text{acier}} = 14 \times 10^{-6} / \text{°C}$ ,  $\alpha_{\text{aluminium}} = 23 \times 10^{-6} / \text{°C}$

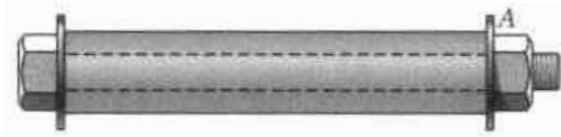


Figure 5. Boulon en acier inséré dans un manchon en aluminium.

### Solution

Le boulon et le manchon sont modélisés par des éléments de section non standard. Pour le manchon en aluminium, on choisit une section circulaire creuse dont les seules données géométriques requises sont le rayon extérieur et le rayon intérieur. Les autres propriétés de la section sont calculées par SAFI, tel que montré à la figure 6. On vérifiera que les propriétés du matériau choisi correspondent aux données du problème. Ainsi, pour le manchon en aluminium, on vérifiera que le module élastique,  $E$ , est égal à 70 GPa et que le coefficient d'expansion thermique est égal à  $23 \times 10^{-6} / \text{°C}$ , tel que montré à la figure 7.

La figure 8 montre le modèle de l'ensemble boulon-manchon. Le boulon et le manchon sont chacun représenté par un élément distinct. Les deux éléments se superposent et sont supportés par des appuis communs à chaque extrémité. La table des membrures peut être consultée pour vérifier le modèle. La charge thermique de 80 °C appliquée aux deux éléments est également montrée à la figure 8, ainsi que la contrainte axiale ( $S_x$  due à  $F_x$ ), dans chaque élément. La contrainte dans le boulon est égale à +29,45 MPa et celle dans le manchon est égale à -40,09 MPa. Le signe + indique une traction et le signe - une compression.

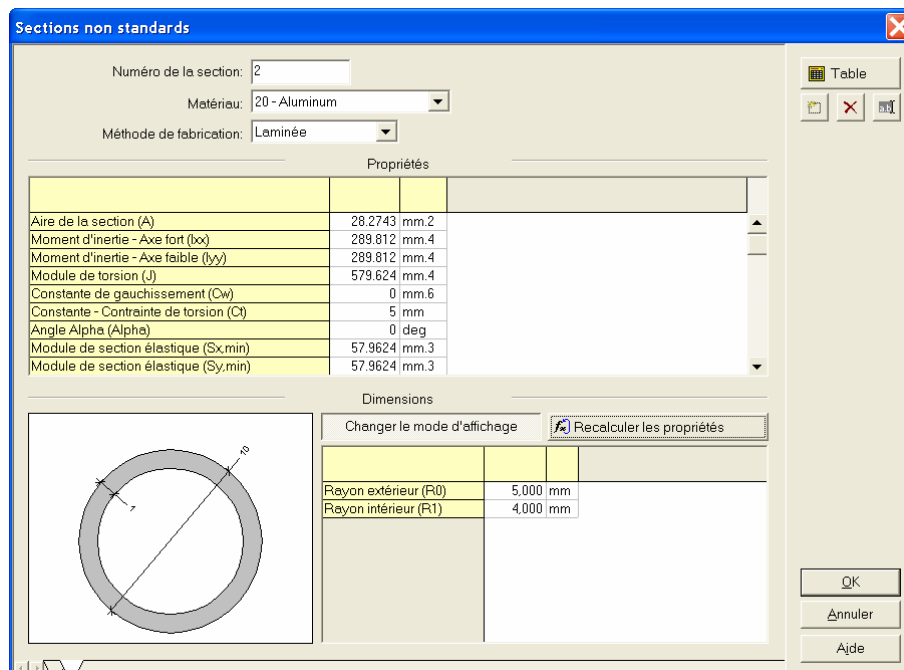


Figure 6. Définition des propriétés géométriques de la section du manchon.

**Matériaux**

Numéro: 20  
 Type: Aluminium

Propriétés

Trempage: Inconnu

	Métal de base	Métal soudé	
Limit élastique (Fy) =	240	96	MPa
Contrainte ultime (Fu) =	300	120	MPa
Module élastique (E) =	70000		MPa
Coefficient de Poisson (nu) =	0.33		
Masse volumique =	2707		kg/m.3
Expansion thermique =	2.3e-005		1/C

Paramètres de prix

Prix unitaire = 0 1/kg  
 Liste de prix: 1

Table  
 OK  
 Annuler  
 Aide

Concrete 3000psi / Concrete 4000psi / Concrete 5000psi / **Aluminium**

Figure 7. Définition des propriétés du matériau aluminium du manchon.

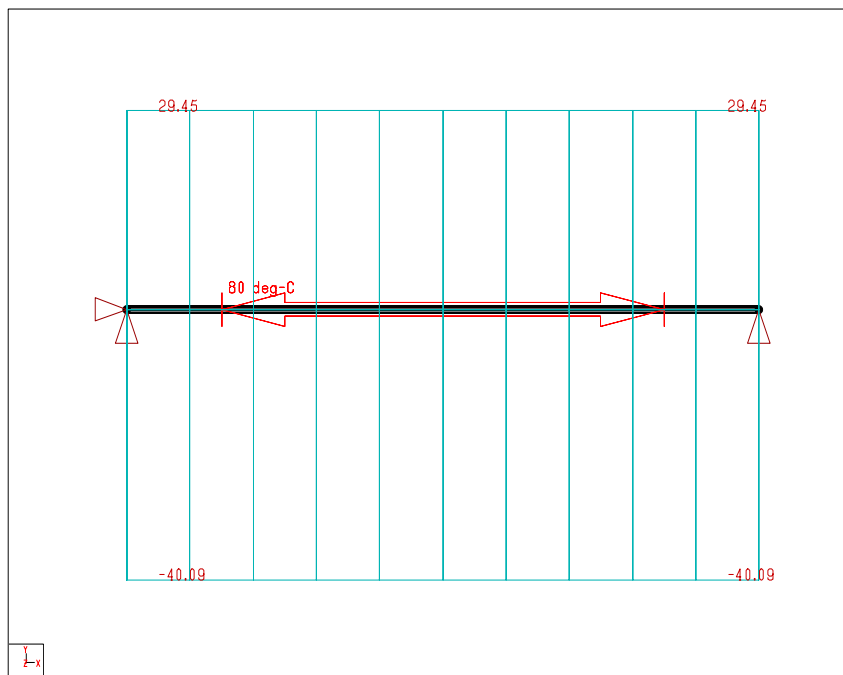


Figure 8. Modèle de l'ensemble boulon-manchon montrant les conditions d'appui, la charge thermique et les contraintes dans le boulon et dans le manchon.

## Vérification

Puisque le coefficient de dilatation thermique de l'aluminium est supérieur à celui de l'acier, le manchon aura tendance à s'allonger davantage que le boulon. De plus, la compatibilité géométrique impose que les déformations du boulon et du manchon soit égales. On s'attend donc à ce que le boulon soit tendu par le manchon et que le manchon soit comprimé par le boulon, tel que montré à la figure 9.



Figure 9. DCL de l'écrou et de l'ensemble boulon-manchon.

On calcule d'abord l'aire de la section du boulon et du manchon :

$$A_b = \frac{\pi(7 \text{ mm})^2}{4} = 38,5 \text{ mm}^2$$

$$A_m = \frac{\pi[(10 \text{ mm})^2 - (8 \text{ mm})^2]}{4} = 28,3 \text{ mm}^2$$

où l'indice  $b$  indique le boulon en acier et l'indice  $m$  indique le manchon en aluminium.

La déformation du boulon est donnée par l'équation suivante :

$$\delta_b = \frac{PL}{A_b E_b} + \alpha_b L \Delta T$$

et la déformation du manchon par l'équation suivante :

$$\delta_m = -\frac{PL}{A_m E_m} + \alpha_m L \Delta T$$

Étant donné que les déformations du boulon et du manchon soit égales (condition de compatibilité géométrique), on a :

$$\delta_b = \delta_m$$

$$\frac{PL}{A_b E_b} + \alpha_b L \Delta T = -\frac{PL}{A_m E_m} + \alpha_m L \Delta T$$

$$P \left( \frac{1}{A_b E_b} + \frac{1}{A_m E_m} \right) = (\alpha_m - \alpha_b) \Delta T$$

$$P = \frac{(23 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C} - 14 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C}) \cdot 80^\circ \text{C}}{\left( \frac{1}{38,5 \text{ mm}^2 \cdot 200 \text{ GPa}} + \frac{1}{28,3 \text{ mm}^2 \cdot 70 \text{ GPa}} \right)} = 1,134 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{boulon}} = \frac{1134 \text{ N}}{38,5 \text{ mm}^2} = 29,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{manchon}} = -\frac{1134 \text{ N}}{28,3 \text{ mm}^2} = -40,1 \text{ MPa}$$