

Problème 3

Le système illustré à la figure 10 est composé de deux cylindres en aluminium ($G = 27 \text{ GPa}$) soudés ensemble au point B ; les extrémités A et D sont encastrees. On soumet le système à un moment de torsion $T_0 = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Calculer la contrainte maximale de cisaillement dans le système, ainsi que la rotation de la section B après l'application de T_0 par rapport à sa position initiale.

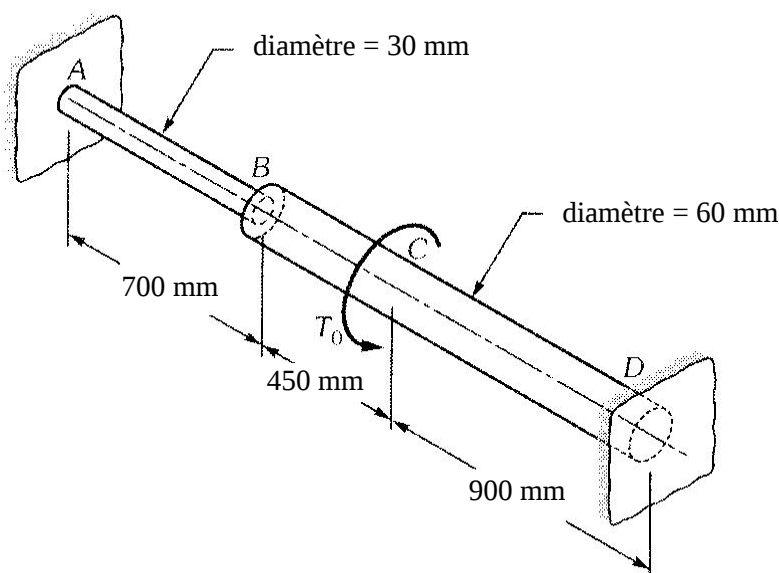


Figure 10. Cylindres en aluminium encastres soumis à un moment de torsion T_0 .

Solution

Le modèle réalisé à l'aide de SAFI est montré à la figure 11. À cause de la torsion, le problème ne peut être résolu en 2D. Il faut donc définir un mode d'analyse 3D (Options générales du menu Outils). Deux éléments définissent les deux cylindres à l'aide de sections non standards, circulaires, pour lesquelles il suffit de définir le rayon (15 mm pour la barre AB et 30 mm pour la barre BCD). Les autres propriétés de section sont calculées par le logiciel, en particulier la constante de torsion égale au moment d'inertie polaire. Aux extrémités, les supports sont définis comme étant des encastremements. On notera en particulier la double flèche dans la direction Z qui indique que la rotation est restreinte autour de l'axe des cylindres. Les propriétés du matériau sont définies à l'aide du module d'élasticité, E , et du coefficient de Poisson, ν . On utilise la relation suivante entre les constantes élastiques du matériau pour que les valeurs de E et ν utilisées correspondent à la valeur $G = 27 \text{ GPa}$:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Soit la valeur typique $\nu = 0,33$ pour l'aluminium et la valeur donnée de $G = 27 \text{ GPa}$, on trouve une valeur de E égale à 71,82 MPa. On spécifiera donc $E = 71820 \text{ MPa}$ et $\nu = 0,33$ dans les propriétés du matériau. Le moment de torsion est défini comme une charge de membrure, concentrée, appliquée à une distance D de 450 mm sur la membrure définie entre les nœuds 2 et 3. Lorsque l'analyse est lancée, l'option Contraintes internes doit être cochée.

Un diagramme des contraintes de cisaillement dues à la torsion le long des cylindres est montré à la figure 12. La contrainte maximale est égale à 21,89 MPa dans la partie CD du système. La rotation des joints est donnée sous forme de tableau à la figure 13. La rotation du joint 2 (point B) est égale à $1,394^\circ$. La valeur positive indique que le sens de cette rotation autour de l'axe Z global est le même que celui du moment de torsion de $1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ appliqué au point B , en accord avec la règle de la main droite.

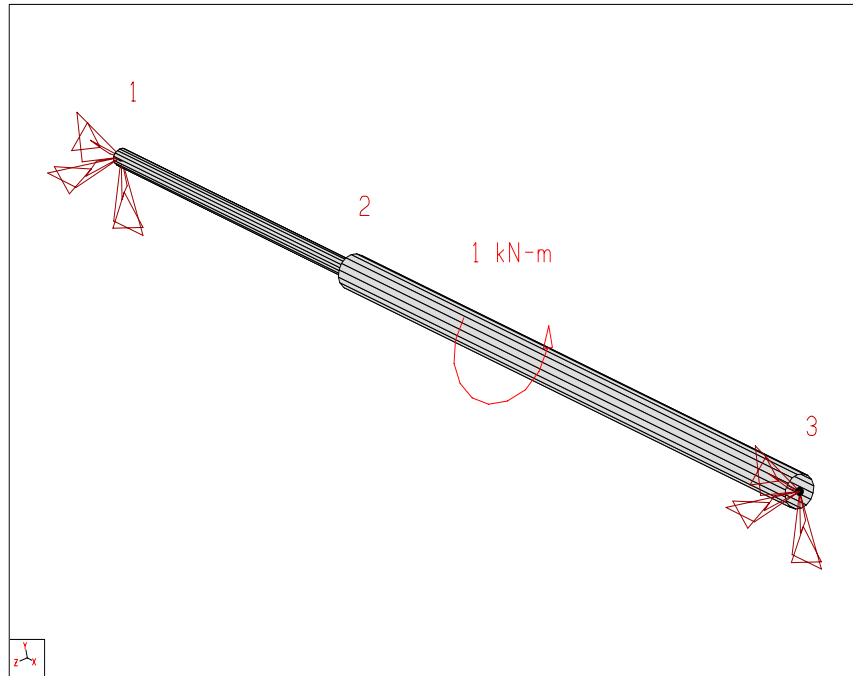


Figure 11. Cylindres en aluminium encastés soumis à un moment de torsion T_0 .

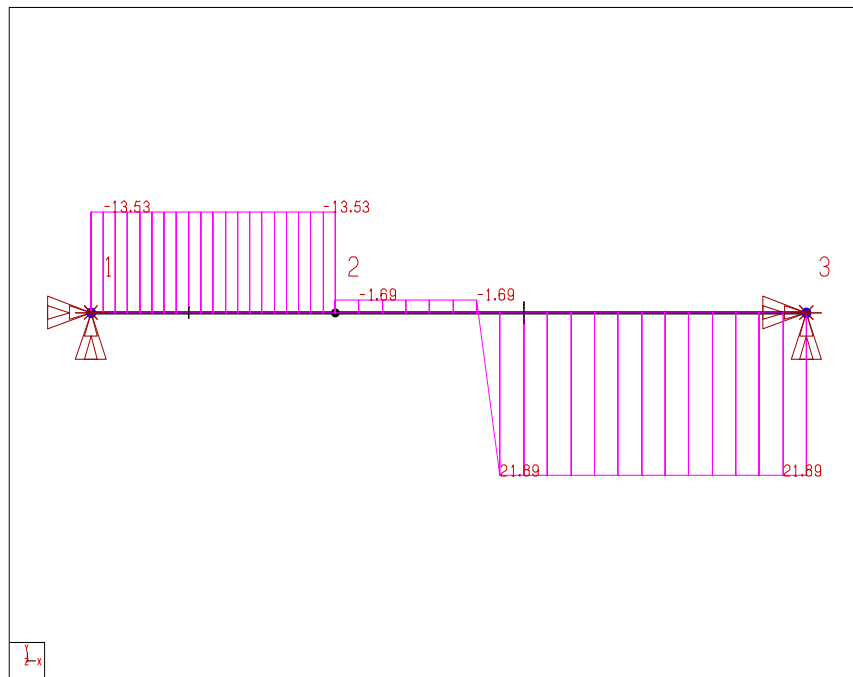


Figure 12. Cylindres en aluminium encastés soumis à un moment de torsion T_0 .

Déplacements des joints									
Fichier Commandes									
	No Joint	No Combinaison	Dépl X mm	Dépl Y mm	Dépl Z mm	Rot X deg	Rot Y deg	Rot Z deg	
	1	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	2	1	0,0000	0,0000	0,0000	1,3943	0,0000	0,0000	
	3	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

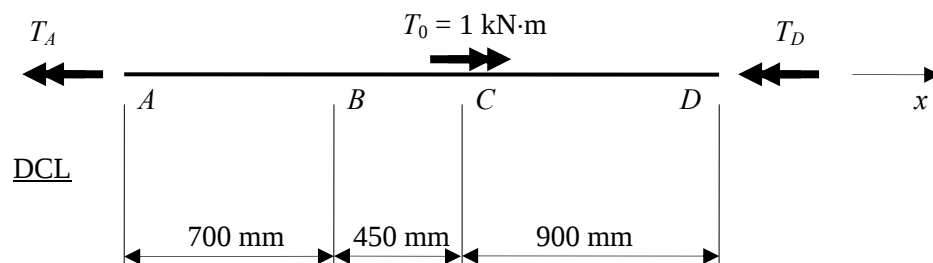
Figure 13. Cylindres en aluminium encastres soumis à un moment de torsion T_0 .

Vérification

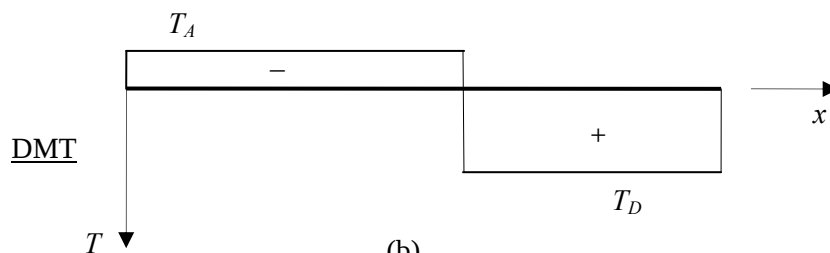
Le problème est hyperstatique au premier degré puisqu'un seul encastrement suffirait pour assurer l'équilibre du système autour de l'axe des cylindres. Il faudra donc considérer les trois principes de résolution des problèmes de résistance des matériaux, soit : l'équilibre, les relations forces/déplacements et la compatibilité géométrique.

Équilibre

Le DCL du système est montré à la figure 14, ainsi que le diagramme des moments de torsion et la convention de signe utilisée pour la torsion. On a supposé un sens pour chaque réaction T_A et T_D . Si la valeur calculée de la réaction est positive, le sens supposé sera confirmé. Sinon, le sens est contraire à celui supposé.



(a)



(b)



(c)

Figure 14. (a) Diagramme du corps libre, (b) diagramme des moments de torsion, (c) convention de signes pour la torsion.

Considérant l'équilibre du système $ABCD$, on a :

$\rightarrow + \sum M_x = 0$: (où x désigne l'axe des cylindres)

$$-T_A + 1 - T_D = 0 \quad (1)$$

Relations forces/déplacements

$$\varphi_{B/A} = \left(\frac{TL}{GJ} \right)_{AB} = \frac{-T_A \cdot 0,7}{GJ_{AB}} \quad (2)$$

$$\varphi_{C/B} = \left(\frac{TL}{GJ} \right)_{BC} = \frac{-T_A \cdot 0,45}{GJ_{BD}} \quad (3)$$

$$\varphi_{D/C} = \left(\frac{TL}{GJ} \right)_{CD} = \frac{T_D \cdot 0,9}{GJ_{BD}} \quad (4)$$

Compatibilité géométrique

$$\varphi_{B/A} + \varphi_{C/B} + \varphi_{D/C} = 0 \quad (5)$$

Les propriétés des sections et du matériau sont les suivantes :

$$J_{AB} = \frac{\pi \cdot 30^4}{32} = 79,5 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 79,5 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_{BD} = \frac{\pi \cdot 60^4}{32} = 1272 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 1272 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

et

$$G = 27 \text{ GPa} = 27 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Les équations (1) à (5) constituent un système d'équations simultanées à cinq inconnues. On peut facilement résoudre ce système, par exemple à l'aide de la calculatrice voyage 200 avec l'opération suivante :

solve (-TA+1-TD=0 and $\varphi_{BA} = -TA \cdot 0,7 / (G \cdot J_{AB})$ and $\varphi_{CB} = -TA \cdot 0,45 / (G \cdot J_{BD})$ and $\varphi_{DC} = TD \cdot 0,9 / (G \cdot J_{BD})$ and $\varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = 0$, {TA,TD, φ_{BA} , φ_{CB} , φ_{DC} }) | G=27*10^6 and JAB=79.5*10^-9 and JBD=1272*10^-9

On trouve les valeurs suivantes :

$$T_A = 0,0717 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_D = 0,928 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\varphi_{B/A} = -0,0234 \text{ rad} = -1,34^\circ$$

$$\varphi_{C/B} = -0,0009 \text{ rad} = -0,05^\circ$$

$$\varphi_{D/C} = +0,0243 \text{ rad} = +1,39^\circ$$

On a :

$$\tau_{AB} = \left(\frac{Tr}{J} \right)_{AB} = \frac{-0,0717 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 10^6 \times 15 \text{ mm}}{79,5 \times 10^3} = -13,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \left(\frac{Tr}{J} \right)_{CD} = \frac{+0,928 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 10^6 \times 30 \text{ mm}}{1272 \times 10^3} = +21,9 \text{ MPa}$$

Donc :

$$|\tau|_{\max} = 21,9 \text{ MPa}$$

et

$$\varphi_B = \varphi_{B/A} = 1,34^\circ \rightarrow$$